Nach der Messung befindet sich das System im Zustand

$$\frac{c_0|00\rangle + c_1|01\rangle}{\sqrt{|c_0|^2+|c_1|^2}} \quad \text{falls } |0\rangle \text{ im 1. Qubit gemessen wurde}$$

$$\frac{c_2|10\rangle + c_3|11\rangle}{\sqrt{|c_2|^2+|c_3|^2}} \quad \text{falls } |1\rangle \text{ im 1. Qubit gemessen wurde}$$

Man beachte: $\left|\frac{c_0|00\rangle + c_1|01\rangle}{\sqrt{|c_0|^2+|c_1|^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{|c_0|^2+|c_1|^2}} \cdot |c_0|00\rangle + c_1|01\rangle| = \frac{1}{\sqrt{|c_0|^2+|c_1|^2}} \cdot \sqrt{|c_0|^2+|c_1|^2} = 1$

D.h. der neue Zustand ist wieder ein Einheitsvektor im $\mathbb{C}^4$.

<u>Def. (separabel/verschränkt)</u>: Wir nennen den Zustand $|z\rangle \in \mathbb{C}^4$ eines 2-Qubit Systems <u>separabel</u>, falls $|z\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle$ für $|x\rangle, |y\rangle \in \mathbb{C}^2$.
Ein Zustand, der nicht separabel ist, heißt <u>verschränkt</u>.

<u>Bsp.</u> (separabler Zustand): $|z\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$ ist separabel

Gesucht $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{C}$ mit $|z\rangle = (\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle) \otimes (\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle)$

$$= \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \alpha_1\beta_1|11\rangle$$

Gleichungssystem $\left|\begin{array}{l} \alpha_0\beta_0 = \frac{1}{2} \\ \alpha_0\beta_1 = \frac{1}{2} \\ \alpha_1\beta_0 = \frac{1}{2} \\ \alpha_1\beta_1 = \frac{1}{2} \end{array}\right|$ erfüllt für $\alpha_0 = \beta_0 = \alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ebenso z.B. für $-\frac{1}{\sqrt{2}}$)

Sei $|z\rangle = (\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle) \otimes (\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle)$ ein separabler Zustand.

<u>Frage</u>: Wie groß ist die Ws., $|0\rangle$ im 1. Qubit zu messen?

$$|z\rangle = \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \alpha_1\beta_1|11\rangle$$

Messung von $|0\rangle$ im 1. Qubit mit Ws.:

$$|\alpha_0\beta_0|^2 + |\alpha_0\beta_1|^2 = |\alpha_0|^2 \cdot \underbrace{(|\beta_0|^2 + |\beta_1|^2)}_{=1} = |\alpha_0|^2$$

Nach Messung von $|0\rangle$ befindet sich das 2-Qubit System im Zustand

$$\frac{\alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle}{\sqrt{|\alpha_0\beta_0|^2 + |\alpha_0\beta_1|^2}} = \frac{\alpha_0|0\rangle \otimes (\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle)}{\sqrt{|\alpha_0|^2 \underbrace{(|\beta_0|^2+|\beta_1|^2)}_{=1}}} = \underbrace{\frac{\alpha_0}{\sqrt{|\alpha_0|^2}}|0\rangle}_{\text{äquivalent zu } |0\rangle} \otimes (\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle)$$

Analog:

- Mit Ws. $|\alpha_1|^2$ Messung $|1\rangle$ im 1. Qubit. Nach Messung: $|1\rangle \otimes (\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle)$
- Mit Ws $|\beta_0|^2$ Messung $|0\rangle$ im 2. Qubit. Nach Messung: $(\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle) \otimes |0\rangle$
- Mit Ws $|\beta_1|^2$ Messung $|1\rangle$ im 2. Qubit. Nach Messung: $(\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle) \otimes |1\rangle$

Man beachte: Bei separablen 2-Qubit Systemen können die einzelnen Qubits unabhängig voneinander betrachtet werden.

Bsp. (verschränkter Zustand): $|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

Schreibe $|z\rangle = (\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle) \otimes (\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle)$

$$\Rightarrow \text{Gleichungssystem} \left| \begin{array}{l} \alpha_0\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \alpha_0\beta_1 = 0 \\ \alpha_1\beta_0 = 0 \\ \alpha_1\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right| \begin{array}{l} \Rightarrow \alpha_0 \neq 0 \wedge \beta_0 \neq 0 \\ \Rightarrow \alpha_0 = 0 \vee \beta_1 = 0 \\ \Rightarrow \alpha_1 = 0 \vee \beta_0 = 0 \\ \Rightarrow \alpha_1 \neq 0 \wedge \beta_1 \neq 0 \end{array} \quad ⚡ \text{ nicht erfüllbar}$$

Bezeichnung (EPR Paar): Ein 2-Qubit System im Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ wird als EPR-Paar (Einstein, Poddsley, Rosen) bezeichnet.

Messung des 1. Qubits eines EPR-Paars liefert

$|0\rangle$ mit Ws. $\frac{1}{2}$, nachher in Zustand $\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = |00\rangle$

D.h. aber: Messung des 2. Qubits liefert ebenfalls Null! (Qubits sind abhängig)

Fakt: 2-Qubit Systeme entwickeln sich gemäß unitärer Abb. $M \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

Bsp. (CNOT)

$$M_{cnot} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} |00\rangle \mapsto |00\rangle \\ |01\rangle \mapsto |01\rangle \\ |10\rangle \mapsto |11\rangle \\ |11\rangle \mapsto |01\rangle \end{array}$$

Controlled-NOT: Das 2. Bit wird genau dann invertiert, wenn das 1. Bit (Kontroll-Bit) gesetzt ist.

Man überprüfe, dass $M_{cnot} \cdot (M_{cnot}^{*})^{T} = I_2$

Def.: $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$ heißt Permutationsmatrix gdw. M in jeder Zeile und Spalte genau eine Eins und sonst Nullen enthält.

Bsp.: M_{cnot} ist Permutationsmatrix.

Übung: Permutationsmatrizen sind unitär.

Bez.: Eine unitäre Abbildung, die nur auf einem Teil der Qubits agiert, heißt lokal unitär.

Sei $|z\rangle = (c_0|00\rangle + c_1|01\rangle + c_2|10\rangle + c_3|11\rangle)$ ein 2-Qubit und $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ unitär.

$c_0(A|0\rangle \otimes B|0\rangle) + c_1(A|0\rangle + B|1\rangle) + c_2(A|1\rangle + B|0\rangle) + c_3(A|1\rangle + B|1\rangle)$ heißt

Anwendung von A auf das 1. Qubit und Anwendung von B auf das 2. Qubit.

Spezialfälle: $B = I_2$ liefert eine lokal unitäre Abb. auf dem 1. Qubit.
$A = I_2$ liefert ——— " ——— 2. Qubit.

Def. (Tensorprodukt bzw. Kronecker-Produkt von Matrizen): Seien

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times m},\; B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Dann ist das Tensorprodukt von A und B definiert als

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{m1}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mm}B \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{mn\times mn}.$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$
$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Satz: Seien $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ unitär. Ferner sei $|z\rangle \in \mathbb{C}^4$ ein 2-Qubit System. Die Anwendung von A auf das 1. Qubit und B auf das 2. Qubit wird beschrieben durch
$$(A \otimes B)\,|z\rangle.$$

Bew: Für $|00\rangle$, andere Basiszustände folgen analog:
$$\begin{aligned}(A\otimes B)|00\rangle &= a_{11}b_{11}|00\rangle + a_{11}b_{21}|01\rangle + a_{21}b_{11}|10\rangle + a_{21}b_{21}|11\rangle \\ &= a_{11}|0\rangle\otimes(b_{11}|0\rangle + b_{21}|1\rangle) + a_{21}|1\rangle\otimes(b_{11}|0\rangle + b_{21}|1\rangle) \\ &= (a_{11}|0\rangle + a_{21}|1\rangle)\otimes(b_{11}|0\rangle + b_{21}|1\rangle) \\ &= A|0\rangle \otimes B|0\rangle\end{aligned}$$

Aus der Linearität von $A\otimes B$ folgt: Gilt obige Identität für alle Basiszustände, so gilt sie auch für alle Linearkombinationen von Basiszuständen.
$\Rightarrow$ Identität gilt für beliebiges $|z\rangle \in \mathbb{C}^4$. ∎

Man beachte: Lokal unitäre Abb. auf separablen Zuständen $|z\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle$ liefert stets einen separablen Zustand: $|z\rangle \xmapsto{A\otimes B} A|x\rangle \otimes B|y\rangle$.
D.h. lokal unitäre Operationen allein können keine Verschränkung erzeugen.

Bsp.1: Anwendung von W_2 auf das 1. Qubit: $W_2 \otimes I_2$

$$W_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W_2 \otimes I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad |00\rangle \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)}_{W_2} \otimes |0\rangle$$

Bsp.2: $W_4 = W_2 \otimes W_2$

$$W_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zustandsübergang für Basiszustand $|x_0x_1\rangle$, $x_0, x_1 \in \{0,1\}$:

$$W_4|x_0x_1\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle + (-1)^{x_1}|01\rangle + (-1)^{x_0}|10\rangle + (-1)^{x_0+x_1}|11\rangle\right)$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + (-1)^{x_0}|1\rangle\right)}_{W_1|x_0\rangle} \otimes \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + (-1)^{x_1}|1\rangle\right)}_{W_2|x_1\rangle}$$

Wissen bereits: Nicht jeder 2-Qubit Zustand ist Tensorprodukt zweier 1-Qubit Zustände.

Analog gilt:

Satz: Nicht jede unitäre Abb. $U \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ ist Tensorprodukt unitärer Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

Bew.:

$$M_{cnot} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist unitär.}$$

Ann.: M_{cnot} sei Tensorprodukt zweier unitärer Abb., d.h. $M_{cnot} = A \otimes B$

Betrachte: $|00\rangle \xmapsto{W_2 \otimes I_2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) \xmapsto{A \otimes B} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

D.h. wir erhalten ein <u>verschränktes</u> EPR-Paar durch lokal unitäre Abbildungen auf dem separablen Zustand $|00\rangle$. $\lightning$ (Widerspruch, s. Seite 10 unten)

Def. (Quanten-Kopiermaschine): Sei $|x\rangle \in \mathbb{C}^2$ ein Qubit. Eine Quanten-Kopiermaschine ist eine unitäre Abb. U mit: $\quad U(|z\rangle \otimes |x\rangle) = |z\rangle \otimes |z\rangle$ für alle Qubits $|z\rangle \in \mathbb{C}^2$.

Satz (No-Cloning Theorem): Es gibt keine Quantenkopiermaschine.

Bew.: Ann.: Es gibt Quanten-Kopiermaschine U.

Seien $|0\rangle, |1\rangle$ Basiszustände. Aufgrund der Kopiereigenschaft gilt:

$U(W_2|0\rangle \otimes |1\rangle) = W_2|0\rangle \otimes W_2|0\rangle$ ist separabel.

Aufgrund der Linearität von U gilt aber ebenfalls

$$U(W_2|0\rangle \otimes |1\rangle) = U\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(U|01\rangle + U|11\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

ist verschränkt (EPR-Paar). $\lightning$