- Amplituden von $|Kopf\rangle$ summieren sich zu 1 → positive Interferenz
- Amplituden von $|Zahl\rangle$ summieren sich zu 0 → negative Interferenz (Auslöschung)
- Ebenen des Baums beschreiben Superpositionen → Quantenparallelität

Strategie: Statt die Ws. unerwünschter Konfigurationen klein zu halten, kann man auch deren Amplituden gegenseitig auslöschen.

25.10.06

Man beachte: Superposition $\alpha_1|x_1\rangle + \dots + \alpha_n|x_n\rangle$ liefert x_i mit Ws. $|\alpha_i|^2$

Wechsel zu anderer orthonormaler Basis $|x_1'\rangle, \dots, |x_n'\rangle$ mit $|x_1'\rangle = \alpha_1|x_1\rangle + \dots + \alpha_n|x_n\rangle$ liefert x_1' mit Ws. 1.

Zustandsübergänge

Da Quantenzustände stets Einheitsvektoren sind : längenerhaltende Abbildung

Aus den Gesetzen der Quantenphysik : lineare Abbildung, reversibel

Def. (unitäre Abb.): Eine lineare Abb. $U: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ heißt unitär, falls für alle $|x\rangle \in \mathbb{C}^n$ gilt: $||x\rangle| = \sqrt{\langle x|x\rangle} = \sqrt{\langle U|x\rangle | U|x\rangle\rangle} = |U|x\rangle|$

Eine Matrix heißt unitär falls $(U^*)^T = U^{-1}$.

Satz: Sei $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ eine unitäre Matrix. Dann gilt für alle $|x\rangle \in \mathbb{C}^m$: $|U|x\rangle| = ||x\rangle|$

D.h. U beschreibt eine unitäre Abb.

Beweis: Lineare Algebra: Für jedes $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $|x\rangle, |y\rangle \in \mathbb{C}^m$ gilt: $\langle x | A|y\rangle\rangle = \langle (A^*)^T|x\rangle | y\rangle\rangle$

$$\Rightarrow |U|x\rangle| = \sqrt{\langle U|x\rangle | U|x\rangle\rangle} = \sqrt{\langle \underbrace{(U^*)^T}_{U^{-1}} U|x\rangle | |x\rangle\rangle} = \sqrt{\langle x|x\rangle} = ||x\rangle|$$

Bsp. Hadamard-Walsh matrix $W_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Übung: $W_2 \cdot (W_2^*)^T = I$

Anmerkung: W_2 beschreibt „Quanten-Münzwurf" (s. Bsp. 3, S. 5)

Entwicklung eines Quantenbits: Sei $|0\rangle = (1,0)$, $|1\rangle = (0,1)$, $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d.h. } |0\rangle \xmapsto{U} a|0\rangle + b|1\rangle$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d.h. } |1\rangle \xmapsto{U} c|0\rangle + d|1\rangle$$

Beispiele unitärer Abbildungen

Bsp. 1 (Quanten Not): $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ M_1 ist unitär, $(M_1^*)^T = M_1$

$(1,0) \mapsto (0,1)$ d.h. $|0\rangle \mapsto |1\rangle$ und $M_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(0,1) \mapsto (1,0)$ $|1\rangle \mapsto |0\rangle$

Bsp. 2 (Wurzel des Not): $\sqrt{M_1} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$

$$|0\rangle \xmapsto{\sqrt{M_1}} \frac{1+i}{2}|0\rangle + \frac{1-i}{2}|1\rangle \xmapsto{\sqrt{M_1}} \frac{1+i}{2}\left(\frac{1+i}{2}|0\rangle + \frac{1-i}{2}|1\rangle\right) + \frac{1-i}{2}\left(\frac{1-i}{2}|0\rangle + \frac{1+i}{2}|1\rangle\right)$$

$$= \left(\left(\frac{1+i}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-i}{2}\right)^2\right) \cdot |0\rangle + 2 \cdot \frac{1-i^2}{4}|1\rangle$$

$$= \frac{1+2i+i^2+1-2i+i^2}{4} \cdot |0\rangle + \frac{4}{4}|1\rangle = |1\rangle$$

Äquivalent $|1\rangle \xmapsto{\sqrt{M_1}} \frac{1-i}{2}|0\rangle + \frac{1+i}{2}|1\rangle \xmapsto{\sqrt{M_1}} |0\rangle$

Wegen $\left|\frac{1+i}{2}\right|^2 = \left|\frac{1-i}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$:

Nach einmaliger Anwendung von $\sqrt{M_1}$ auf $|0\rangle, |1\rangle$: Messung von $|0\rangle, |1\rangle$ mit Ws. $\frac{1}{2}$

Übung: $\sqrt{M_1}$ ist unitär, $(\sqrt{M_1})^2 = M_1$

Bsp. 3 (Hadamard-Walsh matrix): $W_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$|0\rangle \xmapsto{W_2} \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \xmapsto{W_2} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)|0\rangle + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)|1\rangle = |0\rangle$$

Übung: W_2 ist unitär, $W_2^2 = I$

Bsp. 4 (Flip): $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$|0\rangle \mapsto |0\rangle$

$|1\rangle \mapsto -|1\rangle$

allgemein: $F_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$

$|0\rangle \mapsto |0\rangle$

$|1\rangle \mapsto e^{i\theta}|1\rangle$ Man beachte $F_\pi = F$

Def. (Äquivalenz von Zuständen): Zwei Zustände $|x\rangle, |y\rangle \in \mathbb{C}^n$ heißen genau dann äquivalent, wenn gilt: $|x\rangle = e^{i\theta}|y\rangle$

Flip transformiert $|1\rangle$ in einen äquivalenten Zustand. Messung von $|1\rangle$ mit selber Ws.

Übung: $U = \begin{pmatrix} i\cos\Theta & -i\sin\Theta \\ i\sin\Theta & i\cos\Theta \end{pmatrix}$ ist unitär.

Der Zustand eines 2-Qubit Systems ist ein Einheitsvektor im $\mathbb{C}^4$.

Exkurs über Tensorprodukte

Def. (Tensorprodukt): Seien $|x\rangle = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $|y\rangle = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{C}^m$. Das Tensorprodukt von x und y ist definiert als

$$|x\rangle \otimes |y\rangle = (x_1y_1, x_1y_2, \dots, x_1y_m, x_2y_1, \dots, x_2y_m, \dots, x_ny_1, \dots, x_ny_m) \in \mathbb{C}^{nm}$$

Bsp.:
- $|0\rangle = (1,0)$, $|1\rangle = (0,1)$

  $|0\rangle \otimes |1\rangle = (0,1,0,0)$
- $|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$, $|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

  $|x\rangle \otimes |y\rangle = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$

Man beachte: $|x\rangle \otimes |y\rangle \neq |y\rangle \otimes |x\rangle$

Rechenregeln für das Tensorprodukt
- Distributivität:

  $\forall |x\rangle \in \mathbb{C}^n, |y\rangle, |z\rangle \in \mathbb{C}^m: \quad |x\rangle \otimes (|y\rangle + |z\rangle) = |x\rangle \otimes |y\rangle + |x\rangle \otimes |z\rangle$

  $\forall |x\rangle, |y\rangle \in \mathbb{C}^n, |z\rangle \in \mathbb{C}^m: \quad (|x\rangle + |y\rangle) \otimes |z\rangle = |x\rangle \otimes |z\rangle + |y\rangle \otimes |z\rangle$
- Skalare Multiplikation:

  $\forall |x\rangle \in \mathbb{C}^n, |y\rangle \in \mathbb{C}^m, c \in \mathbb{C}: \quad (c|x\rangle) \otimes y = c \cdot (|x\rangle \otimes |y\rangle) = |x\rangle \otimes (c|y\rangle)$
- Skalarprodukt

  $\forall |v\rangle, |x\rangle \in \mathbb{C}^n, |y\rangle, |z\rangle \in \mathbb{C}^m: \langle |v\rangle \otimes |y\rangle \,|\, |x\rangle \otimes |z\rangle \rangle = \langle v|x\rangle \cdot \langle y|z\rangle$
- Norm des Tensorprodukts

  $\forall |x\rangle \in \mathbb{C}^n, |y\rangle \in \mathbb{C}^m \qquad : \big| |x\rangle \otimes |y\rangle \big|^2 = \big||x\rangle\big|^2 \cdot \big||y\rangle\big|^2$

Lemma: Sei $|x_1\rangle, \dots, |x_n\rangle \in \mathbb{C}^n$ eine orthonormale Basis des $\mathbb{C}^n$ und $|y_1\rangle, \dots, |y_m\rangle \in \mathbb{C}^m$ eine orthonormale Basis des $\mathbb{C}^m$. Dann ist

$$|x_1\rangle \otimes |y_1\rangle, |x_1\rangle \otimes |y_2\rangle, \dots, |x_1\rangle \otimes |y_m\rangle, |x_2\rangle \otimes |y_1\rangle, \dots\dots, |x_n\rangle \otimes |y_m\rangle \in \mathbb{C}^{nm}$$

eine orthonormale Basis des $\mathbb{C}^{n \cdot m}$.

Beweis: Für $|x_i\rangle, |y_j\rangle$ gilt:

$$\big||x_i\rangle \otimes |y_j\rangle\big| = \big||x_i\rangle\big| \cdot \big||y_j\rangle\big| = 1 \cdot 1 = 1$$

Weiterhin sind die Vektoren paarweise orthogonal:

$\langle |x_i\rangle \otimes |y_j\rangle \,|\, |x_k\rangle \otimes |y_l\rangle\rangle = \langle x_i|x_k\rangle \cdot \langle y_j|y_l\rangle = 0$ für $i \neq k$ oder $j \neq l$. ∎

Bsp.:
- $|0\rangle = (1,0)$, $|1\rangle = (0,1)$
  - $|0\rangle \otimes |0\rangle = (1,0,0,0)$
  - $|0\rangle \otimes |1\rangle = (0,1,0,0)$
  - $|1\rangle \otimes |0\rangle = (0,0,1,0)$
  - $|1\rangle \otimes |1\rangle = (0,0,0,1)$
- $|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$, $|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$
  - $|x\rangle \otimes |x\rangle = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$
  - $|x\rangle \otimes |y\rangle = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$
  - $|y\rangle \otimes |x\rangle = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$
  - $|y\rangle \otimes |y\rangle = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$

Notation: Seien $|x\rangle \in \mathbb{C}^n$, $|y\rangle \in \mathbb{C}^m$. Wir bezeichnen $|x\rangle \otimes |y\rangle$ abkürzend als $|xy\rangle$.

Insbesondere gilt $|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle$, $|0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle$, usw.

2-Quanten Register

Bezeichne $|00\rangle = (1,0,0,0)$, $|01\rangle = (0,1,0,0)$, $|10\rangle = (0,0,1,0)$, $|11\rangle = (0,0,0,1)$ eine orthonormale Basis des $\mathbb{C}^4$.

Zustand eines 2-Qubit Systems: Ein Zustand eines 2-Qubit Systems ist ein Einheitsvektor

$$|v\rangle = c_0|00\rangle + c_1|01\rangle + c_2|10\rangle + c_3|11\rangle \in \mathbb{C}^4 \text{ mit } c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$$

Es gilt: $|v\rangle$ ist ein Einheitsvektor $\Leftrightarrow |c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$

D.h. die Amplitudenquadrate liefern eine Ws-Verteilung.

Messung eines 2-Qubit Systems: Messung von $|v\rangle$ liefert
- Basiszustand $|00\rangle$ mit Ws. $|c_0|^2$
- — " — $|01\rangle$ mit Ws. $|c_1|^2$
- — " — $|10\rangle$ mit Ws. $|c_2|^2$
- — " — $|11\rangle$ mit Ws $|c_3|^2$

Nach der Messung befindet sich das 2-Qubit System im gemessenen Basiszustand. (Kollaps der Wellenfunktion, irreversibel)

01.11.

Messung eines einzelnen Qubits eines 2-Qubit Systems

Messung des 1. Qubits von $|v\rangle$ liefert:
- $|0\rangle$ mit Ws. $|c_0|^2 + |c_1|^2$
- $|1\rangle$ mit Ws. $|c_2|^2 + |c_3|^2$